

Teorías, leyes y modelos económicos.

El teorema de la imposibilidad de Arrow

La paradoja de Arrow (llamada así en honor a su promotor, el economista Kenneth Arrow¹) es también conocida como el teorema de la imposibilidad. Su formulación muestra que es imposible que las elecciones sociales², al contrario que las individuales, cumplan ciertos criterios de racionalidad y, al mismo tiempo, se respeten unos principios democráticos básicos.

Con el teorema de la imposibilidad de Arrow (TIA), popularizado en su libro «Elección social y valores individuales» (1951) se creó una nueva rama de la economía del bienestar denominada teoría de la elección social. Ésta establece que cuando se tienen 3 o más alternativas para que un cierto número de personas voten por ellas (o establezcan un orden de prioridad entre ellas), ***no es posible diseñar un sistema de votación (o un procedimiento de elección) que permita generalizar las preferencias de los individuos hacia una “preferencia social” única de toda la comunidad.***

O en términos más sencillos: ***en ausencia de una unanimidad plena y bajo hipótesis que parecen razonables, el interés colectivo no puede ser representado.***

En diferentes ciencias o disciplinas (como la economía, la sociología o las ciencias políticas), se acepta como supuesto que, generalmente, los individuos realizan elecciones racionales. Es decir, que reúnen criterios de transitividad, universalidad, reflexividad y actúan con valores democráticos como no dictadura y no imposición. Veamos las características que debe reunir cada uno de ellos.

Transitividad: La propiedad transitiva es una de las que caracteriza las relaciones entre los diferentes elementos de un conjunto. Supongamos que un individuo (x) puede elegir entre tres opciones: A, B y C.

- Si un individuo prefiere A a B
- y ese mismo individuo prefiere B a C,
- Por la propiedad transitiva, de esta situación se deriva que prefiere A a C.

Por tanto, la transitividad permite no solo que una persona elija su opción favorita, sino también pueda establecer un orden de preferencias entre las diferentes alternativas que puede elegir.

Universalidad: Se deben tomar en cuenta todas las combinaciones posibles de las preferencias individuales. Así, dadas tres alternativas (A, B y C) serían posibles seis combinaciones, como las siguientes:

- A es mejor que B.
- B es mejor que A.
- B es mejor que C.
- C es mejor que B.
- C es mejor que A.
- A es mejor que C.

En este caso interesa resaltar que la condición de Arrow (siguiendo la tradición neoclásica) no hace distinción entre preferencias y necesidades, o mejor dicho, no existen necesidades, solo preferencias. Todos los juicios de hecho son del tipo medio-fin, y no existen juicios del tipo vida-muerte.

¹ Kenneth J. Arrow (1921-2017) fue un economista estadounidense ganador del Premio Nobel de Economía en 1972. Este teorema fue demostrado en su tesis doctoral Social Choice and individual values, y dado a conocer en su libro del mismo nombre editado en 1951. El artículo original, A Difficulty in the Concept of Social Welfare, fue publicado en The Journal of political Economy, en agosto de 1950. El teorema comenzó siendo una curiosidad y una paradoja dentro del marco teórico de la economía neoclásica (la imposibilidad de un orden social basado en el interés propio que cumpla con ciertos criterios básicos de democracia), pero terminó siendo la base de la moderna teoría de la elección social.

² La teoría de la elección social o la elección social es un marco teórico para el análisis de la combinación de opiniones individuales, preferencias, intereses o bienestar para llegar a una decisión colectiva o bienestar social en algún sentido. Un ejemplo no teórico de una decisión colectiva es la promulgación de una ley o conjunto de leyes bajo una constitución.

Todo lo que debe importar en el proceso de elección social son las ordenaciones relativas de pares de alternativas. Esto es: i) las preferencias están dadas (no hay posibilidad de reordenamientos, por ejemplo, a través del debate y la deliberación), ii) no existen relaciones interpersonales directas (sólo relaciones indirectas, relaciones “de valor”), iii) si la sociedad no logra la unanimidad y se polariza, no hay posibilidad de acuerdos (que eviten, por ejemplo, una confrontación destructiva).

Reflexividad: La TIA contiene implícita la ética funcional del mercado, resumida en el también llamado “principio anti-estratégico”: no es posible expresar preferencias falsas, o sea, no es posible mentir (los contratos obligan). Los individuos profesan una estricta moral, se supone “hombres de honor”.

Además de estos tres elementos Kenneth Arrow añade dos criterios más, que, en su opinión, son imprescindibles para entender que un modelo de elección es democrático:

No dictadura: No existen individuos que determinen la ordenación de las preferencias sociales con independencia de las preferencias del resto. Es el ideal republicano de un orden democrático entendido como “elecciones libres”: voto universal, anónimo y secreto, con urnas impersonales. Su propósito es convertir la “elección social” en la suma de las decisiones individuales y el acto de votar en un acto privado. Es el elogio del sufragio universal y de las decisiones por mayoría (simple o calificada). Es decir, los individuos toman decisiones de forma independiente y libre, aunque esto como veremos más adelante tiene sus limitaciones.

No imposición o Eficiencia de Pareto. La ordenación de las preferencias sociales depende de las ordenaciones individuales y no son impuestas por otros criterios, como la tradición o el azar. De nuevo, Arrow expresa el ideal de la sociedad de mercado, la constitución de la sociedad es a partir de la suma de los intereses individuales (el individuo propietario y calculador de sus intereses). Además, las ordenaciones son ordinales, no cardinales, lo que conduce a este criterio de comparabilidad muy general (y estándar) como lo es el óptimo de Pareto³, que es un criterio de estricta eficiencia formal desentendido de las relaciones interpersonales y de la justicia distributiva.

Por lo tanto, se darán cuenta, que con el resultado del Teorema de Arrow se puede deducir que no existe ninguna regla de agregación de preferencias que tenga las propiedades normativas deseables, a no ser que las preferencias sean impuestas por un “dictador”. Dicho de otra forma, ninguna regla de elección social puede satisfacer simultáneamente las condiciones axiológicas indicadas.

¿Dónde está la paradoja de Arrow a nivel político?

Por lo tanto Arrow se planteó si existe la posibilidad de establecer un procedimiento de decisión colectiva que pueda cumplir con todos los requisitos de racionalidad y, al mismo tiempo, ser democrático. Su respuesta fue tajante: no.

Con su teorema de la imposibilidad, Arrow mostró que es imposible diseñar un método de votación o elección colectiva que, en contextos en los se pueda elegir entre tres o más opciones, se cumplan los supuestos de racionalidad y, al mismo tiempo, se cumplan los criterios democráticos.

El problema aparece cuando se intenta trasladar las preferencias individuales a preferencias sociales o colectivas. Es decir, cuando se intenta construir un método de votación o elección que permita establecer un orden entre las distintas alternativas a nivel social. *En estas circunstancias es posible que la transitividad desaparezca y dé paso a relaciones circulares o intransitivas, en las que no es posible establecer un orden de preferencias.*

Arrow partió de lo que se conoce como la paradoja de Condorcet⁴. Durante la Revolución francesa, este ilustre filósofo y matemático francés afirmó que decisiones colectivas no son

³ La asignación eficiente en el sentido de Pareto es un punto exacto de equilibrio. Así, no es posible realizar un cambio sin que este afecte al sistema económico. También se conoce a este concepto como óptimo de Pareto.

⁴ La paradoja de Condorcet lleva el nombre de su autor, Nicolás Condorcet (1743-1794). Condorcet, más conocido como el marqués de Condorcet, se dedicó a estudiar, entre otras muchas cosas, las probabilidades y los métodos de elección.

necesariamente transitivas, lo que puede generar que en una votación se prefiera A a B, B a C y, aquí está la paradoja, C a A.

En uno de sus ensayos cayó en la cuenta de que en las preferencias de voto individual, las intenciones estaban claras, pero cuando se daba una votación colectiva se podía dar una paradoja. Por ejemplo, el supuesto de transitividad establece lo siguiente:

Dadas tres alternativas (A, B y C) diremos que se cumple el supuesto de transitividad si dados los siguientes resultados:

- A es mejor que B
- B es mejor que C

Entonces podemos afirmar, por el supuesto de transitividad que A es mejor que C.

Si no se cumple este orden de preferencia, entonces no podemos indicar que exista transitividad. Así pues, puede ocurrir que se prefiera A frente a B y B frente a C, pero no A frente a C. Por ejemplo:

A = Helados

B = Hamburguesa

C = Chocolate

Prefiero comer helados (A) antes que comer hamburguesa (B). Además, prefiero comer hamburguesa (B) antes que comer chocolate (C). Pero, si me das a elegir entre helado (A) y chocolate (C) prefiero el chocolate (C).

Es un caso aparentemente paradójico, pero podría ocurrir. De hecho ocurre en muchas elecciones donde se cruzan las votaciones nacionales en diferentes niveles, donde un partido gana a nivel senador y pierde a nivel diputado.

¿Dónde está la paradoja de Arrow a nivel deportivo?

Otro ejemplo. La AFA ha decidido otorgar un premio a los mejores arqueros de la temporada⁵. Para la misma, están nominados los siguientes: Franco Armani, Dibu Martínez, Gerónimo Rulli y Agustín Rossi.

Se va a celebrar una reunión en Buenos Aires para otorgar la medalla de Oro, Plata, y Bronce, respectivamente. El jurado estará compuesto por tres prestigiosos arqueros de otras épocas: Nery Pumpido, Ubaldo Fillol y Sergio Goycochea, los cuales otorgarán 4, 3, 2 y 1 punto (de mayor a menor preferencia) a los arqueros seleccionados.

A Franco Armani le llegan noticias de que, en el jurado, la mayoría de sus miembros prefieren a Dibu Martínez antes que a Rulli; que la mayoría prefieren a Rulli antes que a Rossi; y que la mayor parte del jurado prefiere a Rossi antes que a él. O sea $Dibu > Rulli > Rossi > Armani$

Con estas premisas, Armani se plantea si vale la pena asistir a la coronación, ya que piensa que no subirá al podio (saldría 4to), o si aprovechará mejor el tiempo entrenando para el próximo partido de River que juega dentro de 3 días. ¿Qué crees que hará Armani? ¿Cómo quedará el pódium de la premiación?

Seguramente de acuerdo a los rumores se puede pensar que la clasificación final fue: 1º Dibu - 2º Rulli - 3º Rossi - 4º Armani. Y esa es una de las posibles clasificaciones que se pueden dar, según los datos conocidos. Aunque no la única, como podemos ver a continuación.

De hecho, Armani debería cambiar de opinión y asistir finalmente a la reunión, ya que las votaciones fueron de la siguiente manera:

<i>Jurado</i>	<i>4 puntos</i>	<i>3 puntos</i>	<i>2 puntos</i>	<i>1 punto</i>
<i>Pumpido</i>	Armani	Dibu	Rulli	Rossi
<i>Goycochea</i>	Rulli	Rossi	Armani	Dibu
<i>Fillol</i>	Rossi	Armani	Dibu	Rulli

⁵ Adaptado de http://www.matifutbol.com/es/quante.html#segunda_parte

Sumemos las puntuaciones y obtendremos la siguiente clasificación con el podio resultante:

Arquero	Puntos
1) Armani	$4 + 3 + 2 = 9$
2) Rossi	$4 + 3 + 1 = 8$
3) Rulli	$4 + 2 + 1 = 7$
4) Dibu	$3 + 2 + 1 = 6$

Esta paradoja la vemos en muchos juegos. La encontramos por ejemplo en atletismo o boxeo, donde el hecho que un deportista le gane a otro, y este a un tercero, no asegura que el primero le gane al tercero. Cuando ocurre en el ámbito futbolístico se arguye siempre que el fútbol “no tiene lógica”, lo cual es evidentemente erróneo. *Lo que ocurre es que el deporte, en general, carece de transitividad.*

Esta sería la paradoja de Arrow que aplicada a un ejemplo deportivo llega a demostrar que es imposible encontrar un sistema perfecto de votación. Ello ***se da en relaciones que no son transitivas***, como es la relación de preferencias.

Como corolario de este tema nos encontramos con la teoría de Donald Saari⁶, quien demostró que es posible provocar, a través del voto, cualquier elección que uno quiera⁷. Esto es, distorsionar la voluntad popular hasta hacerla coincidir con la voluntad de uno. Así, siempre se pueden crear fórmulas de manera que los votantes acaben por votar lo que uno quiere. Desarrollando este ejemplo, y sabiendo más o menos las preferencias de cada uno de los jurados, la organización del evento podría hacer que cualquiera de los arqueros ganase la medalla de Oro.

¿Interesante, no? Esto es lo que se denomina la paradoja electoral. Y es que hay veces en las que el candidato más votado, no resulta finalmente ganador de las elecciones⁸.

Es decir hay una serie de ***relaciones intransitivas***, como en el caso de preferir unas cosas más que otras, en las que se pueden producir paradojas como la del ejemplo futbolero: nos puede gustar más ver un partido de fútbol que ir al cine, podemos preferir ir al cine antes que leer un libro, y sin embargo, gustarnos más leer un libro que ver un partido de fútbol.

¿Dónde está la paradoja de Arrow a nivel económico?

El Teorema de Arrow tiene múltiples aplicaciones en la teoría del bienestar y en las teorías de elección pública, puesto que existiendo dificultades para determinar funciones de bienestar social que puedan satisfacer a todos de manera simultánea, y entonces aplicar políticas de Estado es una importante limitación.

En base a esta paradoja, diversos países redujeron su participación relativa en gran parte de tareas originalmente consideradas como propias del Estado, lo cual en opinión de Arrow permite establecer mecanismos de corrección con un mejor criterio. *El teorema quiere demostrar las dificultades que existen para que se puedan determinar funciones de bienestar social que puedan satisfacer a la colectividad empleando la regla de la mayoría.* Con lo cual la intervención del Estado en el mercado se justifica sólo hasta cierto punto, a partir del cual dicha intervención es ineficiente.

Es así que la constatación efectuada por Arrow respecto a la dificultad para tomar decisiones racionales a través de la regla de la mayoría justifica, según los libremercadistas, la necesidad de reducir el rol del Estado en la regulación de la Sociedad y la economía en su conjunto.

Dado que las decisiones tomadas al interior de un congreso, o un grupo parlamentario, corren el riesgo de no estar siempre conformes con el interés general, resulta necesario establecer mecanismos a través de los cuales sean los individuos y el mercado los que

⁶ Donald Gene Saari (1940) es un matemático estadounidense, profesor distinguido de Matemáticas y Economía y ex director del Instituto de Ciencias del Comportamiento Matemático de la Universidad de California, Irvine.

⁷ De hecho actualmente los medios de prensa y las redes sociales actúan de esa manera.

⁸ Es lo que ocurrió con la llamada “ley de lemas”. En la provincia de Santa Fe hay un buen ejemplo cuando en base a ese sistema Reutemann (B), que sumó los votos de Caimi (C), y otros lemas, le ganó en 1991 la gobernación a Usandizaga (A) el candidato más votado. O sea A superó a B y B superó a C, pero B+C superaron a A.

generen las decisiones, generando los incentivos adecuados y eliminando o corrigiendo las distorsiones que se generen, siendo la actuación del Estado más bien subsidiaria en este ámbito. En síntesis, el Teorema de Arrow es consecuente con la utopía de una “sociedad de mercado”.

Críticas al TIA⁹

Los axiomas de racionalidad y los valores democráticos que Arrow postula como deseables y razonables, pretenden definir en realidad una “sociedad de mercado” (con su correspondiente ética del mercado), es decir, una sociedad que se constituye (y se interpreta) a partir de la racionalidad formal, y donde las relaciones interpersonales son relaciones contractuales, esto es, relaciones voluntarias entre propietarios de cualquier cosa.

En la interpretación de la concepción de igualdad (y de libertad), la igualdad es una igualdad contractual (no simplemente formal): somos iguales porque actuamos como individuos que pactamos contratos unos con otros y procedemos según esos contratos (los contratos obligan a actuar correspondientemente). Sin embargo, según la visión del TIA, todos los intercambios son vistos en términos contractuales en el contexto de un mercado: mercado de bienes, mercado de servicios, mercado de factores productivos, mercado de votos, mercado de afectos, etc.

La elección social arrowiana está regida por esa racionalidad de como los individuos se comportan en el mercado. Individuos calculadores en lo económico y en lo político, por eso decimos que se trata de individuos inscriptos en una sociedad de mercado.

Advirtamos que los individuos calculadores de Arrow no son simples consumidores, son “ciudadanos” con expectativas económicas y políticas, y con valores religiosos y culturales; o sea el ciudadano de Arrow, en la realidad, es un ciudadano que no limita su accionar calculador a los aspectos económicos, sino que potencialmente incluye todo el ámbito social.

¿Qué implicaciones tiene todo esto?

El teorema demuestra que, dadas las suposiciones mínimas de los criterios mencionados al principio, es imposible construir un procedimiento que resulte en una expresión colectivamente racional de los deseos individuales.

Tenemos entonces como resultado una curiosidad: **la imposibilidad de Arrow es en efecto válida para una “sociedad de mercado”, y es al mismo tiempo la percepción crítica más aguda de la imposibilidad de resolver, a través del mercado (como única institucionalidad), el conflicto entre la elección individual y la elección social. Por lo tanto sería también una “paradoja” en sí misma para la teoría económica dominante: invalida el mito de la mano invisible.**

Aunque altamente técnico en su declaración, y a veces complejo de entender, el teorema tiene implicaciones importantes para las filosofías de la democracia y la economía política, ya que con él se rechaza la noción de una voluntad democrática colectiva, ya sea derivada a través de la deliberación cívica o interpretada por expertos que aplican el conocimiento de la mejor manera para una población.

El teorema también niega que puedan existir necesidades básicas objetivas o criterios universales que deban ser aplicados en cualquier procedimiento por la toma de decisiones colectiva, dado que, al fin y al cabo, es imposible lograr unas reglas perfectas.

⁹ <https://www.pensamientocritico.info/articulos-1/goticas-de-economia-critica/el-teorema-de-imposibilidad-de-arrow-reconsiderado-ies-el-bien-comun-una-busqueda-imposible.html>